# OPERACIONES CON POLINOMIOS 3.

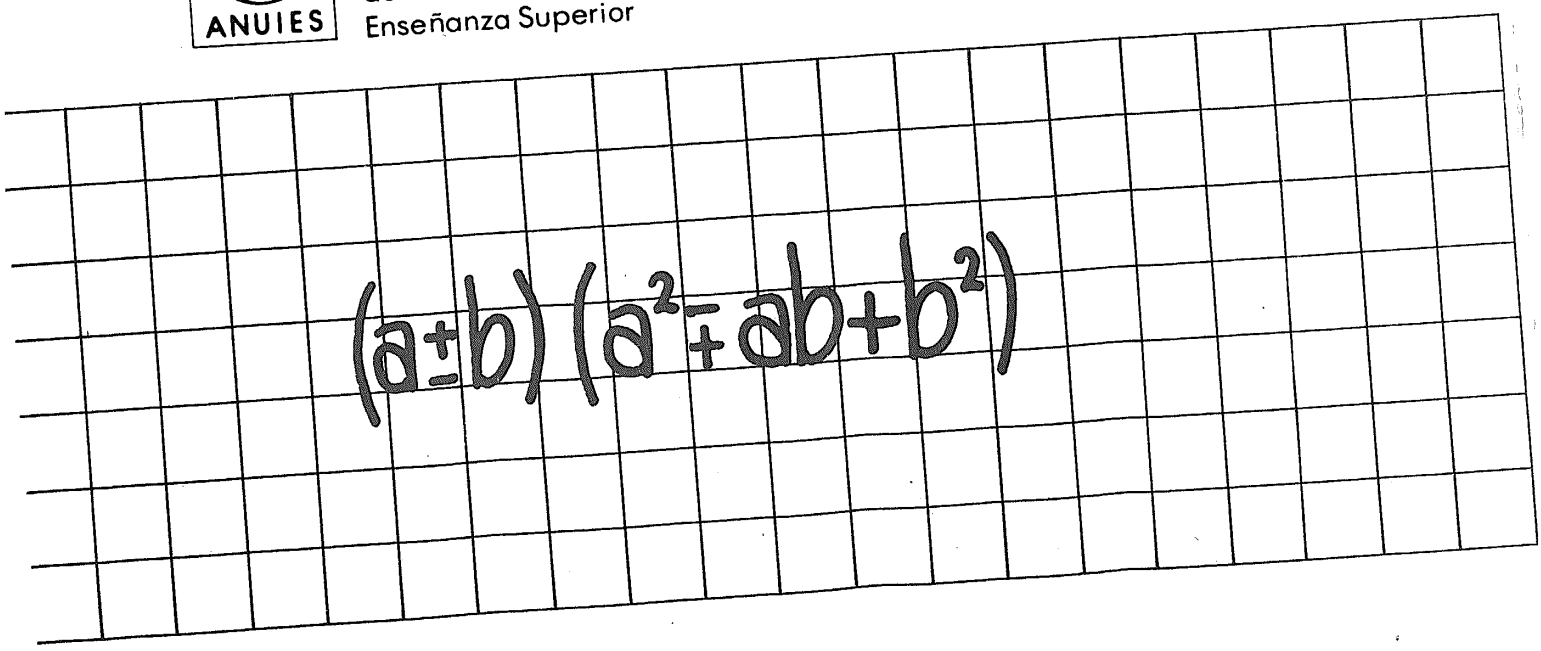
Factorización

Obras que integran el bloque 1 *(Álgebra. Estructuras y operaciones)*

1. Conjuntos
2. Estructuras matemáticas
3. El conjunto de los enteros
4. Operaciones con enteros
5. Lenguaje algebraico 1. Formación
6. Lenguaje algebraico 2. Transformación
7. Operaciones con polinomios 1. Suma, resta, multiplicación y división
8. Operaciones con polinomios 2. Productos notables
9. ***Operaciones con polinomios 3. Factorización***
10. El conjunto de los racionales
11. Operaciones con expresiones racionales
12. El conjunto de los reales
13. Operaciones con expresiones reales
14. El conjunto de los complejos. Estructura y operaciones

ANUIES

Asociación Nacional
de Universidades e Institutos de
Enseñanza Superior



# Módulos de matemáticas

## Bloque 1

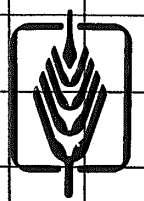
## Álgebra. Estructuras y operaciones

# Módulo 9

# OPERACIONES CON POLINOMIOS 3.

Factorización

**Conrado Flores García**



EDITORIAL TRILLAS

México, Argentina, Colombia, España, Puerto Rico, Venezuela

*Revisión técnica:* *Myriam P. Acuña Monsalve*
*Licenciada en economía,*
*Universidad Nacional*
*Autónoma de México*

*La presentación y disposición en conjunto de*
*OPERACIONES CON POLINOMIOS 3. Factorización*
*son propiedad del editor. Ninguna parte de esta obra*
*puede ser reproducida o trasmitida, mediante ningún sistema*
*o método, electrónico o mecánico (incluyendo el fotocopiado,*
*la grabación, o cualquier sistema de recuperación y almacenamiento*
*de información), sin consentimiento por escrito del editor*

*Derechos reservados*
*© 1985, Editorial Trillas, S. A. de C. V.*
*Av. Río Churubusco 385, Col. Pedro María Anaya,*
*Deleg. Benito Juárez, 03340, México, D. F.*

*Miembro de la Cámara Nacional de la*
*Industria Editorial. Reg. núm. 158*

Primera edición, abril 1985
ISBN 968-24-1509-8

*Impreso en México*

# PRESENTACIÓN

## Descripción general de la serie

Para la elaboración de los textos que componen la serie MÓDULOS DE MATEMÁTICAS se tomaron en cuenta los objetivos de los programas de estudio de un gran número de instituciones de enseñanza media superior.

La serie consta de 64 módulos didácticos agrupados en 8 bloques, a saber:

1. Álgebra. Estructuras y operaciones.
2. Álgebra. Modelos.
3. Nociones de lógica matemática.
4. Geometría euclidiana.
5. Trigonometría.
6. Geometría analítica.
7. Cálculo diferencial.
8. Cálculo integral.

Cada bloque se complementa con un compendio de la información contenida en los módulos didácticos que lo forman y al cual hemos dado el nombre de MEMO, ya que es una ayuda a la *memo*ria, al entusiasmo y al esfuerzo.

Por otra parte, cada módulo contiene una sucesión de cuadros de aprendizaje, los cuales están organizados en cierto número de submódulos (capítulos); en los que se presenta la información en orden creciente de complejidad. En atención a su fin, hemos designado a los cuadros con los nombres: *informativos, de pregunta* y *de respuesta.* Asimismo, se presentan cuadros complementarios para efectuar, si es necesario, ejercicios o prácticas adicionales.

## Sugerencias a los lectores

Los MÓDULOS DE MATEMÁTICAS están dirigidos a diferentes clases de lectores: los profesores de enseñanza media superior, los estudiantes inscritos en cursos escolarizados de este nivel, estudiantes autodidactas y, en general, personas que deseen actualizar sus conocimientos en este campo.

En lo que respecta a los profesores, éstos pueden usar los módulos como parte integrante de sus guiones de clase; para tal efecto, deben revisar el programa correspondiente y advertir en qué parte puede incorporarse tal o cual módulo, ya que los textos están basados en un gran número de programas y no en uno solo. Al seleccionar los módulos que correspondan al curso planeado, éste quedará dividido en tareas de aprendizaje. El dominio de cada módulo quedará determinado por la consecución de los objetivos específicos.

En relación con los estudiantes inscritos en cursos escolarizados, los MÓDULOS DE MATEMÁTICAS pueden servirles como material complementario y como una posibilidad de desarrollar los ejercicios que se revisan en el aula.

Los estudiantes autodidactas notarán que cada uno de los textos es un "escalón numerado" que debe seguirse con precisión para poder acceder al siguiente. Los cuadros informativos, los de pregunta y los de respuesta son las partes fundamentales de cada peldaño. En los cuadros informativos se presentan los aspectos que deben ser estudiados con sumo cuidado. Dichos cuadros se destacan con el símbolo ☞, el cual indica que se les debe prestar atención especial. Los cuadros de pregunta brindan el espacio suficiente para anotar la respuesta correspondiente, la cual puede ser verificada en los cuadros de respuesta que están situados justo al lado del cuadro de pregunta (para tal efecto, es conveniente tapar el cuadro de respuesta durante la elaboración de la misma, a fin de poder comprobar el resultado que se obtenga).

El alumno logrará el dominio de cada uno de los módulos mediante la consecución de los objetivos anotados al final de cada submódulo. Dichos objetivos indican lo que el estudiante debe ser capaz de hacer al terminar de examinar cada etapa: sólo si se han cumplido los objetivos deberá pasarse al siguiente módulo.

Respecto a las personas que quieren actualizar sus conocimientos en el campo de las matemáticas, es necesario que estudien los módulos desde el comienzo (a manera de repaso), ya que de esta manera se evitará que algún tema quede poco claro debido a la falta de conocimiento de aquellos que lo fundamentan. Para ello, se ha incluido una lista de prerrequisitos que deben cumplirse para poder entender determinados temas.

Cabe señalar que la mencionada lista de prerrequisitos, comprende aquellos puntos que son útiles para todos los tipos de lectores, pues se especifican los conocimientos que deben tenerse para poder comprender y asimilar mejor el contenido del módulo en cuestión.

Una última observación: las metas sólo se logran cuando el esfuerzo por alcanzarlas se fundamenta en el agrado, el entusiasmo y la motivación, en el caso de los alumnos, y en la planeación adecuada y la exposición convincente, en lo que respecta a los profesores.

CONRADO FLORES GARCÍA

## ÍNDICE DE CONTENIDO

*Presentación*

*Objetivos, esquema estructural y prerrequisitos*

9.1 Factorización distributiva. Factor común monomio 9

9.2 Factorización distributiva. Factor común polinomio 39

9.3 Factorización por agrupación 43

9.4 Factorización de trinomios cuadrados perfectos 50

9.5 Factorización de la diferencia de los cuadrados de dos monomios en $\mathbb{Z}$ 75

9.6 Factorización de trinomios de la forma $x^2 + px + q$, en $\mathbb{Z}$ 83

9.7 Factorización de un trinomio de la forma $px^2 + qx + r$ en que $p, q, r \in \mathbb{Z}$, y x es un monomio en $\mathbb{Z}$ 99

9.8 Factorización de una suma o diferencia de dos monomios cubo perfecto en $\mathbb{Z}$ 105

9.9 Factorización de un polinomio cubo perfecto en $\mathbb{Z}$ 121

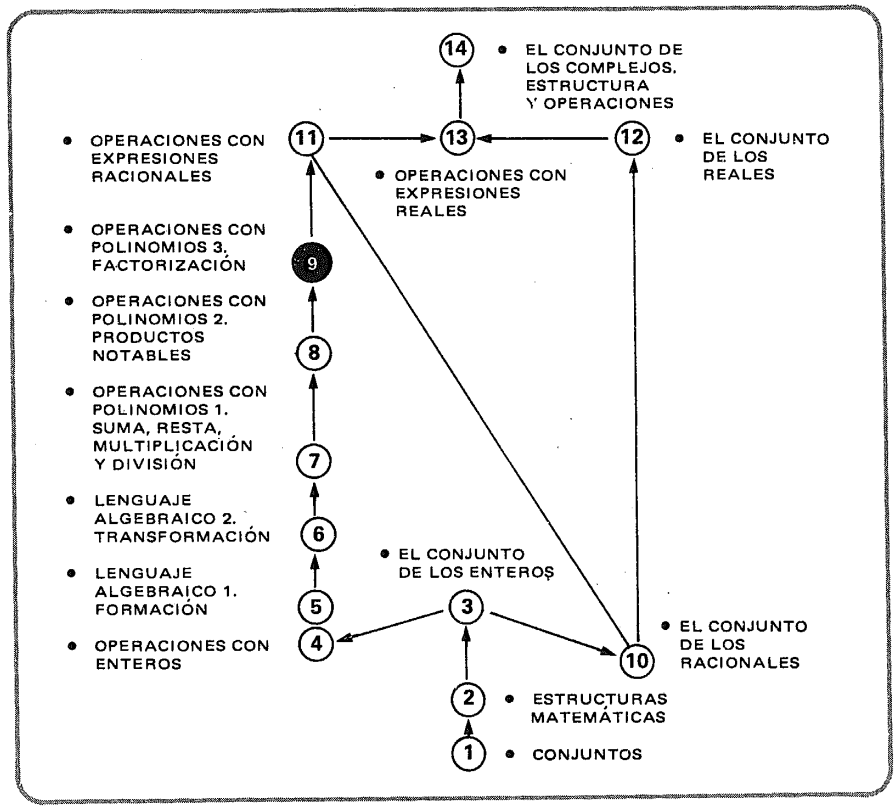
9.10 Resumen de factorización en $\mathbb{Z}$ 127

## OBJETIVOS, ESQUEMA ESTRUCTURAL Y PRERREQUISITOS

### Bloque 1. Álgebra. Estructuras y operaciones

*Objetivos*: establecer las estructuras matemáticas relacionadas con los números naturales, enteros, racionales, reales y complejos. Efectuar las cuatro operaciones binarias fundamentales y las operaciones monarias de potenciación y radicación con expresiones algebraicas pertenecientes a cada uno de los cinco conjuntos mencionados

*Esquema estructural del bloque 1*




### Módulo 9. Operaciones con polinomios
### 3. Factorización

*Objetivos*: factorizar en enteros una expresión algebraica que sea identificada como polinomio entero con factor común, trinomio cuadrado perfecto, diferencia de cuadrados, trinomio cuadrático, o bien, como suma o diferencia de cubos

| *Prerrequisitos*: | Bloque | Módulo(s) |
|---|---|---|
| • Suma, resta, multiplicación y división de polinomios con coeficientes enteros | 1 | 7 |
| • Productos notables | 1 | 8 |

9.1

Factorización distributiva.
Factor común monomio

1

Recordemos
la factorización
aritmética.

2

Decimos que:

Si $3 \times 4 = 12$

- 3 es **factor** de 12
- y
- 4 es **factor** de 12

3

Si $12 = 4x3$

también decimos que:

- 12 está expresado como producto de los factores 4 y 3
- 12 está factorizado
- 12 está descompuesto en los factores 4 y 3

Esta operación se llama

**factorización**
o
**descomposición factorial**

4

En

$12 = 4x3$

observamos que el factor 4
puede ser, a su vez, descompuesto
en factores:

$4 =$ [ ]

2x2

5

$12 = 4x3$

y

$4 = 2x2$

Entonces, por sustitución:

$12 =$ [ ]

2x2x3

6

$$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$$

Ahora, decimos que:

12 está **descompuesto en factores primos**

o

12 está **totalmente factorizado**

7

Hay varias maneras de **descomponer en factores un número compuesto;**

por ejemplo:

$$12 = 3 \cdot 4$$

$$12 = 6 \cdot 2$$

No obstante, sólo hay una forma * de **descomponerlo en factores primos** o factorizarlo completamente:

$$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$$

* Si no se considera el orden.

8

En este módulo, el tema de estudio es la

**factorización**

o

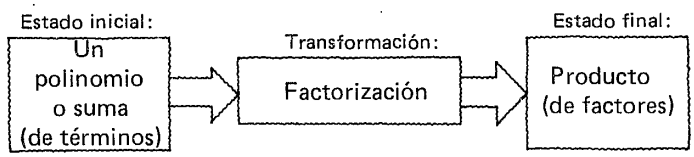
**descomposición factorial**

de

**polinomios en** $\mathbb{Z}$.

9

Podemos interpretar la **factorización** como un proceso de **transformación de una suma en un producto.**




10

Identificaremos expresiones en el

**estado inicial** de

polinomio en $\mathbb{Z}$ (suma —de términos)

y en el **estado final** de producto (de factores).

11

Señalar las expresiones que están en el **estado inicial** de polinomio en $\mathbb{Z}$:

- $3x + 4$
- $x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$
- $3ab^2 - 3b^3$
- $(a + b)(a - b)$
- $\dfrac{3x - 2}{x + 1}$
- $(x + y)(x^2 - xy + y^2)$
- $x^2 + 2xy + y^2$
- $x^3 + 3x^2 - \dfrac{3}{x - 2}$

$3x + 4$

$3ab^2 - 3b^3$

$x^2 + 2xy + y^2$

$x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$

**1.9.1.1**

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

12

Señalar las expresiones que se encuentran
en el **estado final** de producto (de factores):

$a^2 + ab$

$(a + b)(a - b)$

$(a - b)^2$

$\frac{5x + 5}{x}$

$(x - y)(x^2 + xy + y^2)$

$5xy(x - 2 + 3)$

$(x - 1)(x + 2)(x - 3)$

$x^3 + 3x^2y - 8x^4 - 2$

$(a + b)(a - b)$

$(a - b)^2$
$= (a - b)(a - b)$

$(x - y)(x^2 + xy + y^2)$

$5xy(x - 2 + 3)$

$(x - 1)(x + 2)(x - 3)$

**1.9.1.2**

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

13

$xa + xb =$ ⌊_____⌋

aplicando la **propiedad distributiva** de la multiplicación con respecto a la suma

$x(a + b)$

14

$ax + bx =$ ⌊_____⌋

$(a + b)x$

15

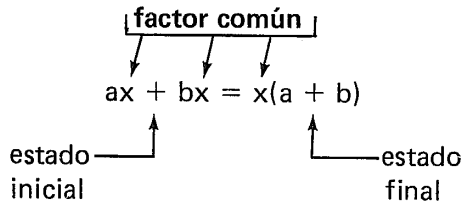
Estudiar con atención.

Estado inicial: polinomio o suma (de términos) → Estado final: producto (de factores)

- $xa + xb = x(a + b)$
- $ax + bx = (a + b)x$

16

A x le llamaremos




17

Recordemos ahora lo que es el

**máximo común divisor (MCD)**
**o**
**máximo factor común (MFC)**

18

Sean dos números:

12 y 18

que descomponemos en factores primos:

12 = ⌊_____⌋ 18 = ⌊_____⌋

Respuesta
en el
cuadro siguiente

19

divisores primos de 12 ↓ divisores primos de 18 ↓

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 12 \| 2 | | | 18 \| 2 |
| 12 ÷ 2 → | 6 \| 2 | | 18 ÷ 2 | 9 \| 3 |
| 6 ÷ 2 → | 3 \| 3 | | 9 ÷ 3 | 3 \| 3 |
| 3 ÷ 3 → | 1 | | 3 ÷ 3 | 1 |

$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$ $18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$

El máximo factor común (MFC o máximo común divisor (MCD) es ⌊_____⌋

Respuesta en el cuadro siguiente

$12 = ② \cdot 2 \cdot ③$ $18 = ② \cdot ③ \cdot 3$

Máximo común divisor o máximo factor común:

$2 \cdot 3 = 6$

Recordemos que "el máximo común divisor o máximo factor común de dos o más números es igual al producto de los factores comunes de los números".

En este caso, los factores comunes son 2 y 3.

20

Tres números:

24 48 60

El máximo factor común o máximo común divisor es ⌊____⌋

Respuesta en el cuadro siguiente

| 24 | ② |
|---|---|
| 12 | ② |
| 6 | 2 |
| 3 | ③ |
| 1 | |

| 48 | ② |
|---|---|
| 24 | ② |
| 12 | 2 |
| 6 | 2 |
| 3 | ③ |
| 1 | |

| 60 | ② |
|---|---|
| 30 | ② |
| 15 | ③ |
| 5 | 5 |
| 1 | |

Máximo factor común o máximo común divisor $= 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3 = 12$

21

Tres números:

15 25 45

El máximo factor común o máximo común divisor es ____

Respuesta en el cuadro siguiente

| 15 | 3 |
|---|---|
| 5 | ⑤ |
| 1 | |

| 25 | ⑤ |
|---|---|
| 5 | 5 |
| 1 | |

| 45 | 3 |
|---|---|
| 15 | ⑤ |
| 3 | 3 |
| 1 | |

El máximo factor común o máximo común divisor es 5

22

7 5 12

El máximo factor común
o máximo común divisor es ____

Respuesta
en el
cuadro siguiente

| 7 | 7 | 5 | 5 | 12 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | 1 | | 6 | 2 |
| | | | | 3 | 3 |
| | | | | 1 | |

El máximo factor común o
máximo común divisor es 1

Entonces: 7, 5 y 12 son **primos entre sí.**

23

21 14 35

El máximo común divisor o
máximo factor común es ____

Respuesta
en el
cuadro siguiente

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 21 | 3 | 14 | 2 | 35 | 5 |
| 7 | ⑦ | 7 | ⑦ | 7 | ⑦ |
| 1 | | 1 | | 1 | |

El máximo factor común o
máximo común divisor es 7

24

120 150

El máximo factor común o
máximo común divisor es ⌊_____⌋

Respuesta
en el
cuadro siguiente

| | | | |
|---|---|---|---|
| 120 | ② | 150 | ② |
| 60 | 2 | 75 | ⑤ |
| 30 | 2 | 15 | 5 |
| 15 | ③ | 3 | ③ |
| 5 | ⑤ | 1 | |
| 1 | | | |

El máximo común divisor o
máximo factor común = $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$

25

360 720

El máximo factor común o
máximo común divisor es ⌊_____⌋

Respuesta
en el
cuadro siguiente

| 360 | ② |
|---|---|
| 180 | ② |
| 90 | ② |
| 45 | ③ |
| 15 | ③ |
| 5 | ⑤ |
| 1 | |

| 720 | ② |
|---|---|
| 360 | ② |
| 180 | ② |
| 90 | 2 |
| 45 | ③ |
| 15 | ⑤ |
| 3 | ③ |
| 1 | |

El máximo factor común o
máximo común divisor = $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360$

26

Ahora bien, tenemos dos términos:

$a^5 b$ $a^4 b^4$

El máximo factor común o
máximo común divisor es ⌊_____⌋

Respuesta
en el
cuadro siguiente

Estudiar con mucha atención.

| | |
|---|---|
| $a^5 b$ | ⓐ |
| $a^4 b$ | ⓐ |
| $a^3 b$ | ⓐ |
| $a^2 b$ | ⓐ |
| $ab$ | a |
| $b$ | ⓑ |
| 1 | |

| | |
|---|---|
| $a^4 b^4$ | ⓐ |
| $a^3 b^4$ | ⓐ |
| $a^2 b^4$ | ⓐ |
| $ab^4$ | ⓐ |
| $b^4$ | ⓑ |
| $b^3$ | b |
| $b^2$ | b |
| $b$ | b |
| 1 | |

El máximo factor común o máximo común divisor es: $a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot b = a^4 b$

27

$x^6 y^3 z^4$ $\qquad$ $x^3 y^3 z$

El máximo común divisor o máximo factor común es $\underline{\qquad\qquad}$

Respuesta en el cuadro siguiente

Sigamos estudiando con atención.

$x^6 y^3 z^4$

$\underbrace{\text{ⓧ}\cdot\text{ⓧ}\cdot\text{ⓧ}}_{x^3} \cdot x \cdot x \cdot x \cdot \underbrace{\text{ⓨ}\cdot\text{ⓨ}\cdot\text{ⓨ}}_{y^3} \cdot \underbrace{\text{ⓩ}}_{z} \cdot z \cdot z \cdot z$

$x^3 y^3 z$

$\underbrace{\text{ⓧ}\cdot\text{ⓧ}\cdot\text{ⓧ}}_{x^3} \cdot \underbrace{\text{ⓨ}\cdot\text{ⓨ}\cdot\text{ⓨ}}_{y^3} \cdot \underbrace{\text{ⓩ}}_{z}$

El máximo factor común o máximo común divisor es: $x^3 y^3 z$

28

$m^2 n^3 r^4$ $\qquad$ $m^3 n^2 r^3$

El máximo factor común o
máximo común divisor es $_____$

Respuesta
en el
cuadro siguiente

$m^2 n^3 r^4$ $\qquad$ $m^3 n^2 r^3$

$\underbrace{m \cdot m}_{m^2} \cdot \underbrace{n \cdot n}_{n^2} \cdot n \cdot \underbrace{r \cdot r \cdot r}_{r^3} \cdot r$ $\qquad$ $\underbrace{m \cdot m}_{m^2} \cdot m \cdot \underbrace{n \cdot n}_{n^2} \cdot \underbrace{r \cdot r \cdot r}_{r^3}$

El máximo factor común o
máximo común divisor es $m^2 n^2 r^3$

29

Ahora, intentemos dar el resultado por simple inspección:

$x^3 y^2$ $\qquad$ $x^2 y^2$ $\qquad$ $x^4 y$

El máximo factor común o
máximo común divisor es $_____$

En caso de duda,
efectuar la descomposición factorial completa,
como en los casos anteriores.

$x^2 y$

30

Por simple inspección:

$a^4 b^2$ $a^5 b^3$ $a^2 b^6$

El máximo común divisor o máximo factor común es ⌊_____⌋

$a^2 b^2$

31

Por simple inspección:

$m^4 n^5$ $m^3 r^3$ $m^2 r^4$

El máximo común divisor o máximo factor común es ⌊_____⌋

$m^2$

32

Por simple inspección:

$a^3 b^4$ $a^2 c^3$ $a^4 d^5$

El máximo común divisor o máximo factor común es ⌊_____⌋

$a^2$

33

$12a^2b$ $6ab^2$

El máximo común divisor o
máximo factor común es ⌊_____⌋

Respuesta
en el
cuadro siguiente

| | |
|---|---|
| $12a^2b$ | ② |
| $6a^2b$ | 2 |
| $3a^2b$ | ③ |
| $a^2b$ | ⓐ |
| $ab$ | a |
| $b$ | ⓑ |
| 1 | |

| | |
|---|---|
| $6ab^2$ | ② |
| $3ab^2$ | ③ |
| $ab^2$ | a |
| $b^2$ | b |
| $b$ | ⓑ |
| 1 | |

El máximo factor común o
máximo común divisor es: $2 \cdot 3 \cdot a \cdot b = 6ab$

**1.9.1.3**

Establecimiento de una **regla** para la determinación del **máximo factor común** o **máximo común divisor** de dos o más monomios,
y práctica adicional de
**determinación del MFC o MCD,**
si se considera necesario.

34

Regresemos a nuestro problema de

**factorización de un polinomio,**

cuyos términos tienen un

**factor común.**

35

Una expresión algebraica:

$a^2 + 3a$

¿Está en el estado inicial de polinomio en $\mathbb{Z}$?

Sí/No

Sí

36

$a^2 + 3a$

MFC de los términos = [ ]

a

37

Escribimos:

$$a^2 + 3a = \underbrace{a}_{\text{máximo factor común}}\ (\underbrace{\quad\quad}_{\text{factor determinado por división de } a^2 + 3a \text{ entre } a})$$

$a + 3$

38

$$a^2 + 3a = a(a + 3)$$

ya que:

$$\frac{a^2 + 3a}{a} = \frac{a^{\not 2}}{\not a} + \frac{\not 3 a}{\not a} = a + 3$$

En esta forma
el polinomio queda
**factorizado totalmente** o **descompuesto en factores primos.**

39

Atención.

$$a^2 + 3a = a(a + 3)$$

Esta operación puede ser
comprobada por multiplicación:

$$a(a + 3) = a^2 + 3a$$

40

Una expresión algebraica como ésta:

$$6a^3b^2 + 3a^2b$$

puede ser factorizada de varias maneras, en la misma forma en que, por ejemplo, el número 24 puede ser descompuesto.

$$24 = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

Dar las diferentes formas en que el número 24 puede ser descompuesto en factores.

$2 \cdot 12$
$3 \cdot 8$
$4 \cdot 6$
$2 \cdot 2 \cdot 6$
$4 \cdot 2 \cdot 3$
$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$

sin contar la descomposición trivial:

$24 \cdot 1$

41

Asimismo:

$$6a^3b^2 + 3a^2b$$
$$= a(6a^2b^2 + 3ab)$$
$$= a^2(6ab^2 + 3b)$$
$$= b(6a^3b + 3a^2)$$
$$= 3(2a^3b^2 + a^2b)$$

etcétera,

sin contar la descomposición trivial:

$$1(6a^3b^2 + 3a^2b)$$

42

Por lo general, nos interesa la

**descomposición factorial total** o
**en factores primos;**

para esto es necesario tomar el

**máximo factor común** o
**máximo común divisor**

como uno de los factores.

43

$6a^3b^2 + 3a^2b$

Máximo factor común = [_____]

$3a^2b$

44

$6a^3b^2 + 3a^2b = 3a^2b($[_____]$)$

$2ab + 1$

45

$6a^3b^2 + 3a^2b = 3a^2b(2ab + 1)$

Este resultado
puede ser expresado como sigue:

$3 \cdot a \cdot a \cdot b \cdot (2ab + 1)$

en que cada uno de los factores es divisible
únicamente por sí mismo y por la unidad
(es decir, es primo).

46

Factorizar totalmente las siguientes expresiones.

47

$x^2 + xy =$ _____

$x(x + y)$

48

$x + x^2 =$ _____

$x(1 + x)$

49

$x^3 + 2x =$ _____

$x(x^2 + 2)$

50

$5x^3 + 5x^2 =$ _____

$5x^2(x + 1)$

51

$ab + bc =$ _____

$b(a + c)$

52

$m^2n + 7mn =$ _____

$mn(m + 7)$

53

$2a^2b + 4ab^2 =$ _____

$2ab(a + 2b)$

54

$k^3 + k^2 + k =$ _____

$k(k^2 + k + 1)$

55

$8a^3b^2 + 12a^2b^3 = _____$

$4a^2b^2(2a + 3b)$

56

$24a^2b^2 + 12a^3b + 36a^2b^3 = _____$

$12a^2b(2b + a + 3b^2)$

57

$15x^3y^2 + 20x^2y^3 + 5x^4 = _____$

$5x^2(3xy^2 + 4y^3 + x^2)$

58

$28m^3n + 14m^2n^2 + 56mn^3 =$ ____

$14mn(2m^2 + mn + 4n^2)$

59

$x^3 - x^2y =$ ____

$x^2(x - y)$

60

$5x^2y - 10xy^2 =$ ____

$5xy(x - 2y)$

61

$-3x^3 - 6x^2 + 12x =$ ____

Atención.

$3x(-x^2 - 2x + 4)$

o

$-3x(x^2 + 2x - 4)$

62

$-x^4 - x^5 - x^3 - x =$ ____

$x(-x^3 - x^4 - x^2 - 1)$

o

$-x(x^3 + x^4 + x^2 + 1)$

El factor $-1$ **no** debe considerarse **trivial.**

63

$-12a^2b^3 - 24ab^2 + 36a^3b - 48a^4b^5$

$=$ ____

Respuesta en el cuadro siguiente

$-12ab(ab^2 + 2b - 3a^2 + 4a^3b^4)$

o

$12ab(-ab^2 - 2b + 3a^2 - 4a^3b^4)$

La elección de un resultado
u otro dependerá de los
requerimientos del problema particular
al que se aplique el procedimiento que
estamos estudiando.

64

$a^{10}b^5 - a^{15}b^{10} =$ _____

$a^{10}b^5(1 - a^5b^5)$

65

$x^{20}y^{15} - x^{10}y^{20} =$ _____

$x^{10}y^{15}(x^{10} - y^5)$

66

$a^n b^m - a^n b^r =$ _____

$a^n(b^m - b^r)$

67

$a^n b^{m-1} + a^{n-1} b^m =$ _____

$a^{n-1} b^{m-1}(a + b)$

68

$3a^3 b + 7a^2 b^3 =$ _____

$a^2 b(3a + 7b^2)$

69

$5a^2b - 11a^3b^2 =$ ____

$a^2b(5 - 11ab)$

70

$7a^3b + 3c^3d =$ ____

Puesto que los dos

**términos son primos entre sí,**
su **máximo factor común**

es 1, por lo tanto la única descomposición posible (en $\mathbb{Z}$) es la trivial:

$1(7a^3b + 3c^3d)$

**que, por lo general,**
**no nos sirve para nada.**

71

$5x^2z - 8yw =$ ____

No es posible otra descomposición (en $\mathbb{Z}$) diferente de la trivial.

**1.9.1.4**

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

**1.9.1**

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *efectuar* la factorización distributiva en $\mathbb{Z}$, de polinomios cuyos términos tienen un factor común monomio.

9.2

Factorización distributiva. Factor común polinomio

72

El **factor común** puede ser un polinomio (no monomio).

73

$x(a + b) + y(a + b)$

El factor común es $\square$

$a + b$

74

Factorizando, obtenemos:

$x(a + b) + y(a + b) =$ [ ]

$(a + b)(x + y)$

75

$2x(a - 1) - y(a - 1) =$ [ ]

$(a - 1)(2x - y)$

76

Atención.

$m(x + 2) + x + 2 =$ [ ]

Observar con atención.

La expresión
$m(x + 2) + x + 2$
también puede ser escrita así:

$m(x + 2) + 1(x + 2)$

$(x + 2)(m + 1)$

77

$m + n + x(m + n) =$ ____

$m + n + x(m + n)$

↓

$1(m + n) + x(m + n)$

↓

$(m + n)(1 + x)$

78

Atención.

$x(a + b) - a - b =$ ____

Observar con atención.

$x(a + b) - a - b$

↓

$x(a + b) - 1(a + b)$

↓

$(a + b)(x - 1)$

79

$-m - n + (m + n)x =$ ____

Observar con atención.

$-m - n + (m + n)x$

$-1(m + n) + (m + n)x$

$(m + n)(-1 + x)$

o bien:

$(m + n)(x - 1)$

**1.9.2.1**

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

**1.9.2**

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *efectuar* la *factorización distributiva* en $\mathbb{Z}$ de polinomios, cuyos términos tienen un factor común polinomio.

## 9.3

## Factorización por agrupación

80

Se requiere factorizar la expresión:

$$ax + bx + ay + by$$

¿Tienen todos los términos un factor común diferente de 1?

Sí/No

No

81

No obstante, podemos dividir la expresión en dos partes:

$$\overbrace{ax + bx}^{1} + \overbrace{ay + by}^{2}$$

y factorizar cada una de ellas.
El factor común de la primera parte es $\square$

x

82

$$\overbrace{ax + by}^{1} + \overbrace{ay + by}^{2}$$

El factor común de la segunda parte es [_____]

y

83

Factoricemos por separado las dos partes:

$$\underbrace{ax + bx}_{\text{[_____]}} + \underbrace{ay + by}_{\text{[_____]}}$$

Respuesta en el cuadro siguiente

$$\underbrace{ax + bx}_{x(a+b)} + \underbrace{ay + by}_{y(a+b)}$$

Escribimos:

$$ax + bx + ay + by = x(a + b) + y(a + b)$$

y observamos que en la expresión del segundo miembro hay un factor común polinomio que es [_____]

$a + b$

84

$$ax + bx + ay + by = x(a + b) + y(a + b)$$

Factorizando nuevamente, tenemos que:

$$x(a + b) + y(a + b) = \square$$

$(a + b)(x + y)$

85

Estudiemos con atención.

$$ax + bx + ay + by = x(a + b) + y(a + b)$$
$$= (a + b)(x + y)$$

Comprobación:

$$\begin{array}{r} a + b \\ x + y \\ \hline ax + bx + ay + by \end{array}$$

86

Factorizar, utilizando el procedimiento del ejemplo anterior:

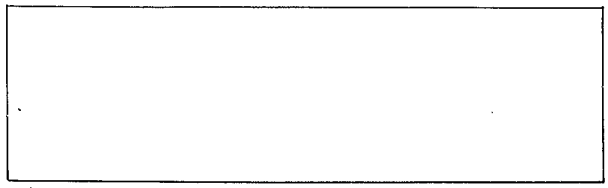
$$3x^2 - 6xy + 4x - 8y$$
$$= \square$$
$$= \square$$

$$\underbrace{3x^2 - 6xy}_{} + \underbrace{4x - 8y}_{}$$
$$3x(x - 2y) + 4(x - 2y)$$
$$(x - 2y)(3x + 4)$$

87

$$3x(x - 2y) + 4(x - 2y) = (x - 2y)(3x + 4)$$

Comprobación:



$$\begin{array}{r} x - 2y \\ 3x + 4 \\ \hline 3x^2 - 6xy + 4x - 8y \end{array}$$

88

El procedimiento anterior puede aplicarse a polinomios que son equivalentes al producto de dos binomios:

$$(a + b)(x + y) = ax + bx + ay + by$$

89

Intentemos

**factorizar por agrupación**

las expresiones siguientes.

90

$a^2 + ab + ax + bx$

$= \square$

$= \square$

$\underbrace{a^2 + ab}\ \underbrace{+ ax + bx}$

$a(a + b) + x(a + b)$

$(a + b)(a + x)$

91

Atención

$x^2 - a^2 + x - a^2 x$

$= \square$

$= \square$

Reordenando los términos, escribimos:

$\underbrace{x^2 + x}\ \underbrace{- a^2 - a^2 x}$

$x(x + 1) - a^2(1 + x)$

Ordenando nuevamente:

- $x(x + 1) - a^2(x + 1)$
- $(x + 1)(x - a^2)$

92

$6ax + 3a + 1 + 2x$

$= \square$

$= \square$

$\underbrace{6ax + 3a}\ \underbrace{+ 1 + 2x}$

$3a(2x + 1) + (1 + 2x)$

reordenando:

- $3a(2x + 1) + 1(2x + 1)$
- $(2x + 1)(3a + 1)$

93

$xz + 2yz + 3x + 6y$

$= \boxed{\qquad\qquad}$

$= \boxed{\qquad\qquad}$

$\underbrace{xz + 2yz}\ \underbrace{+ 3x + 6y}$

$z(x + 2y) + 3(x + 2y)$

$(x + 2y)(z + 3)$

94

Desde luego que **no** todos los polinomios de cuatro términos pueden factorizarse de la manera indicada.

**1.9.3.1**

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

**1.9.3**

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *efectuar* la factorización distributiva en $\mathbb{Z}$ por agrupación, de algunos polinomios de cuatro términos.

9.4

Factorización de trinomios cuadrados perfectos

95

Sabemos que:

$(a \pm b)^2 =$ [ ]

$a^2 \pm 2ab + b^2$

96

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

De modo que, por la propiedad de **simetría** de las igualdades:

$a^2 \pm 2ab + b^2 =$ [ ]

$(a \pm b)^2$

97

Estudiar con mucha atención este esquema

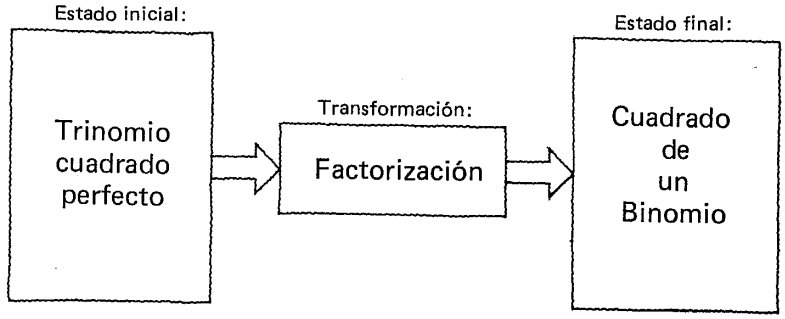
$(a \pm b)^2$
cuadrado de un binomio
→ por multiplicación obtenemos →
$a^2 \pm 2ab + b^2$
trinomio cuadrado perfecto

$a^2 \pm 2ab + b^2$
trinomio cuadrado perfecto
→ por factorización obtenemos →
$(a \pm b)^2$
cuadrado de un binomio

No olvidemos que $(a \pm b)^2$ es una manera de expresar el producto de dos factores : $(a \pm b)(a \pm b)$

98

Factorización de un trinomio cuadrado perfecto,
interpretada como un proceso de transformación
de una suma (de términos) en un producto (de factores):




99

Necesitamos establecer un criterio
para identificar un

**trinomio cuadrado perfecto** (en $\mathbb{Z}$)

(estado inicial).

100

Observemos con atención el

**"modelo" de un trinomio cuadrado perfecto ordenado, en $\mathbb{Z}$ :**

$$a^2 \pm 2ab + b^2$$

a y b son monomios en $\mathbb{Z}$*

* Simbólicamente: $a, b \in M\mathbb{Z}$, siendo $M\mathbb{Z}=\{ x/x$ es un monomio en $\mathbb{Z}\}$
Recordemos que un monomio en $\mathbb{Z}$ es una expresión de la forma $ax^m y^n z^r \ldots$ en que $a \in \mathbb{Z}$ y $m, n, r \ldots \in \mathbb{N}$

101

Modelo: $a^2 \pm 2ab + b^2$ $\quad a, b \in M\mathbb{Z}$

si $\quad a^2 = 4x^2$

¿qué es a?

Diremos que:

$a = 2x$, dado que: $(2x)^2 = 4x^2 = a^2$

y descartaremos la posibilidad:

$a = -2x$, que también nos da: $(-2x)^2 = 4x^2 = a^2$

Simbólicamente: Si $a^2 = 4x^2$; $a = \sqrt{4x^2} = 2x$.

102

Modelo: $a^2 \pm 2ab + b^2$ $\quad a, b \in M\mathbb{Z}$

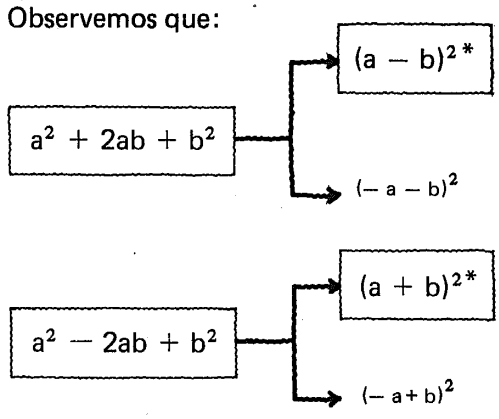
si $\quad a^2 = 9$

diremos que:

$a = \sqrt{9} = 3$

103

Observemos que:




* Por convención tomamos estas expresiones como resultados y descartaremos las otras dos.

104

Si $a^2 = x^4$

$a =$ ____

$x^2$

105

Si $a^2 = x^6$

$a =$ ____

$x^3$

106

Si $a^2 = x^{10}$

$a =$ ____

$x^5$

107

Si $a^2 = x^7$

$a =$ ____

$a \notin M\mathbb{Z}$

o, en otras palabras:

a **no** es un monomio en $\mathbb{Z}$

108

Si $a^2 = x$

$a =$ ____

$a \notin M\mathbb{Z}$

(a **no** es un monomio en $\mathbb{Z}$)

109

Si $a^2 = n^3$

$a =$ ⌊_____⌋

$a \notin M\mathbb{Z}$

(a **no** es un monomio en $\mathbb{Z}$)

110

Si $a^2 = x^{2m}$ $m \in \mathbb{Z}^+$

$a =$ ⌊_____⌋

$x^m$

111

Si $a^2 = x^4 y^6$

$a =$ ⌊_____⌋

$x^2 y^3$

112

Si $a^2 = x^2y^4z^6$

$a =$ ⌊_____⌋

$xy^2z^3$

113

Si $a^2 = 4$

$a =$ ⌊____⌋

2

114

Si $a^2 = 25$

$a =$ ⌊____⌋

5

115

Si $a^2 = 13$

$a =$ ⌊_____⌋

$a \notin M_{\mathbb{Z}}$

(a **no** es un monomio en $\mathbb{Z}$)

116

Si $a^2 = 1$

$a =$ ⌊____⌋

1

117

Si $a^2 = 2$

$a =$ ⌊_____⌋

$a \notin M_{\mathbb{Z}}$

118

Si $a^2 = 16x^2y^4$

$a =$ ⌊_____⌋

$4xy^2$

119

Si $a^2 = 7x^2$

$a =$ ⌊_____⌋

$a \notin M\mathbb{Z}$

120

Atención.

Si $a \in M\mathbb{Z}$

decimos que:

$a^2$

es un **monomio cuadrado perfecto.**

**1.9.4.1**

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

121

$$\textcircled{a^2} \pm 2ab + \textcircled{b^2}$$
$$a, b \in M\mathbb{Z}$$

Hemos visto que dos de los términos de un

**trinomio cuadrado perfecto en** $\mathbb{Z}$ (ordenado)

son monomios cuadrados perfectos y
ocupan el primero y tercer lugar.

122

Entonces, lo primero que tenemos
que hacer para saber si un trinomio
dado es un

**trinomio cuadrado perfecto en** $\mathbb{Z}$

es: ver si dos de sus términos son
monomios cuadrados perfectos, y
cambiar su orden, si es necesario,
para que ocupen el primero y tercer
lugar.

123

$$a^2 \pm 2ab + b^2$$
$$a, b \in M\mathbb{Z}$$

Una vez ordenados los términos, de acuerdo con el criterio anterior, deberá verificarse que:

- el signo del primero y tercer término sea $+$, mientras que el signo del segundo término puede ser $+$ o $-$.

124

Luego, de acuerdo con el modelo

$$a^2 \pm 2ab + b^2$$
$$a, b \in M.\mathbb{Z}$$

nos preguntamos:

- ¿qué es a?
- ¿qué es b?

y verificamos si el segundo término, excluido su signo, es igual a 2ab.

125

Por ejemplo, queremos saber si el trinomio

$$4x^2 + 9y^2 - 12xy$$

es un trinomio cuadrado perfecto en $\mathbb{Z}$.

126

$4x^2 + 9y^2 - 12xy$

1. ¿Son dos de los términos del trinomio, monomios cuadrados perfectos?

   Sí/No

Sí

$4x^2$ y $9y^2$

son monomios cuadrados perfectos

127

$4x^2 + 9y^2 - 12xy$

2. Los términos que son monomios cuadrados perfectos ¿ocupan el el primero y tercer lugar?

   Sí/No

3. Si la respuesta es **No**, cambiar el orden de los términos para que los monomios cuadrados perfectos ocupen el primero y tercer lugar:

   _____

No

$4x^2 - 12xy + 9y^2$

(o bien $9y^2 - 12xy + 4x^2$)

128

$4x^2 - 12xy + 9y^2$

4. Así reescrito el trinomio, ¿el signo del primero y del tercer término es + ?

   Sí/No

Sí

129

$4x^2 - 12xy + 9y^2$

De acuerdo con el modelo: $a^2 \pm 2ab + b^2$

5. $a =$ ____ 2x

$b =$ ____ 3y

$2ab =$ ____ $2 \cdot 2x \cdot 3y = 12xy$

El segundo término del trinomio, excluido su signo, ¿es igual a 2ab?

Sí/No Sí

130

Entonces,

el trinomio $4x^2 + 9y^2 - 12xy$

es un

**trinomio cuadrado perfecto en** $\mathbb{Z}$

que puede ser escrito en alguna de estas dos formas:

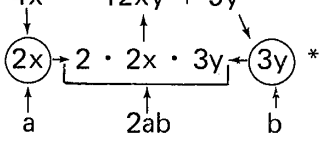
- $4x^2 - 12xy + 9y^2$
- $9y^2 - 12xy + 4x^2$

para ajustarse al modelo ⟶ $a^2 \pm 2ab + b^2$

131

Estudiar con atención este esquema.

- trinomio dado: $4x^2 + 9y^2 - 12xy$
- trinomio ordenado: $4x^2 - 12xy + 9y^2$




* Podemos escribir: $a = \sqrt{4x^2} = 2x$

$b = \sqrt{9y^2} = 3y$

132

$x^2 + 2x + 1$

¿Es un trinomio cuadrado perfecto en $\mathbb{Z}$?

Sí/No

- Sí

puesto que corresponde al modelo

$\mathbf{a^2 \pm 2ab + b^2}$ $a, b \in M\mathbb{Z}$

con

$a = x$

$b = 1$

$2ab = 2 \cdot x \cdot 1 = 2x$

133

$y^2 - 4y + 4$

¿Es un trinomio cuadrado perfecto en $\mathbb{Z}$?

Sí/No

- Sí

pues corresponde al modelo

$\mathbf{a^2 \pm 2ab + b^2}$ $a, b \in M\mathbb{Z}$

con

$a = y$

$b = 2$

$2ab = 2 \cdot y \cdot 2 = 4y$

134

$3m^2 - 4mn + n^2$

¿Es un trinomio cuadrado perfecto en $\mathbb{Z}$?

Sí/No

- No

porque no corresponde al modelo

$\mathbf{a^2 \pm 2ab + b^2}$ $a, b \in M\mathbb{Z}$

($3m^2$ no es un monomio cuadrado perfecto)

135

$9x^2 + 12xy - 4y^2$

¿Es un trinomio cuadrado perfecto?

Sí/No

- No

porque no corresponde al modelo

$\mathbf{a^2 \pm 2ab + b^2}$ $a, b \in M\mathbb{Z}$

que pide que el signo del tercer término sea +

136

$2n + 1 + n^2$

¿Es un trinomio cuadrado perfecto en $\mathbb{Z}$?

Sí/No

- Sí

porque al ser escrito en la forma $1 + 2n + n^2$ (o en la forma $n^2 + 2n + 1$) corresponde al modelo

$\mathbf{a^2 \pm 2ab + b^2}$ $a, b \in M\mathbb{Z}$

con $a = 1$
$b = n$
$2ab = 2 \cdot 1 \cdot n = 2n$

(o bien $a = n$, $b = 1$
$2ab = 2n$)

137

$\frac{a^2}{4} + \frac{ab}{3} + \frac{b^2}{9}$

¿Es un trinomio cuadrado perfecto en $\mathbb{Z}$?

Sí/No

- No

porque no corresponde al modelo

$\mathbf{a^2 \pm 2ab + b^2}$ $a, b \in M\mathbb{Z}$

puesto que

$a, b \notin M\mathbb{Z}$

138

$a + 2\sqrt{ab} + b$

¿Es un trinomio cuadrado perfecto en $\mathbb{Z}$?

Sí/No

- No

porque no corresponde al modelo

$a^2 \pm 2ab + b^2$ $\quad a, b \in M\mathbb{Z}$

pues

$a, b \notin M\mathbb{Z}$

**1.9.4.2**

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

139

Escribir el término faltante para que la expresión sea un trinomio cuadrado perfecto.

$9x^2 + \boxed{\phantom{00}} + 4y^2$

Modelo:

$a^2 \pm 2ab + b^2$

trinomio dado, incompleto.

$9x^2 + \boxed{?} + 4y^2$

$a = 3x$

$b = 2y$

$2ab = 2 \cdot 3x \cdot 2y$

- $12xy$

140

$64m^4 - \boxed{\quad} + 9$

Modelo:

$a^2 \pm 2ab + b^2$

trinomio dado, incompleto:

$64m^4 - \boxed{?} + 9$

$a = 8m^2$

$b = 3$

$2ab = 2 \cdot 8m^2 \cdot 3$

- $48m^2$

141

$25n^6 + \boxed{\quad} + 16$

Modelo:

$a^2 \pm 2ab + b^2$

trinomio dado, incompleto:

$25n^6 + \boxed{?} + 16$

$a = 5n^3$

$b = 4$

$2ab = 2 \cdot 5n^3 \cdot 4$

- $40n^3$

142

$4x^2y^4 - \boxed{\quad} + 1$

Modelo:

$a^2 \pm 2ab + b^2$

trinomio dado, incompleto:

$4x^2y^4 - \boxed{?} + 1$

$a = 2xy^2$

$b = 1$

$2ab = 2 \cdot 2xy^2 \cdot 1$

- $4xy^2$

143

$81k^8n^4 + \boxed{\quad} + 16$

Modelo:

$a^2 \pm 2ab + b^2$

trinomio dado, incompleto:

$81k^8n^4 + \boxed{?} + 16$

$a = 9k^4n^2$

$b = 4$

$2ab = 2 \cdot 9k^4n^2 \cdot 4$

- $72k^4n^2$

144

$x^{2m} + \boxed{\quad} + y^{2n}$

Modelo:

$a^2 \pm 2ab + b^2$

trinomio dado, incompleto:

$x^{2m} + \boxed{?} + y^{2n}$

$a = x^m$

$b = y^n$

$2ab = 2 \cdot x^m \cdot y^n$

- $2x^m y^n$

**1.9.4.3**

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

145

Identificación de expresiones en el estado final de

**cuadrado de un binomio.**

146

**Cuadrado de un binomio**

es equivalente al producto de dos binomios iguales.

147

Señalar las expresiones que sean cuadrado de un binomio (o producto de dos binomios iguales):

$(a + b)^2$

$(x - 1)^2$

$(a + 3)(a + 3)$

$(x + 2)(x - 2)$

$(3x + 2y - z)^2$

$(x + 3)(x + 2)$

$(3x - 4y)^2$

$x + 4$

$x^2 + 2xy + y^2$

$(xy + 10)^2$

$(a + b)^2$

$(x - 1)^2$

$(a + 3)(a + 3)$

$(3x - 4y)^2$

$(xy + 10)^2$

148

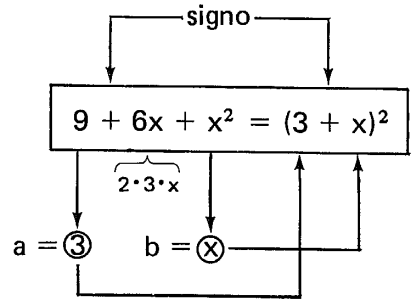
En los cuadros siguientes factorizaremos las expresiones que sean trinomios cuadrados perfectos en $\mathbb{Z}$.

149

Estudiemos con mucha atención este esquema.

Modelo: $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$

$a, b \in M\mathbb{Z}$




150

$x^2 + 2xy + y^2 =$ [ ]

$(x + y)^2$

151

$x^2 - 2xy + y^2 =$ _____

$(x - y)^2$

152

$x^2 + 2x + 1 =$ _____

$(x + 1)^2$

153

$4x^2 - 4x + 1 =$ _____

$(2x - 1)^2$

154

$a^4 - 6a^2 + 9 =$ _____

$(a^2 - 3)^2$

155

$m^8 + 12m^4 + 36 =$ _____

$(m^4 + 6)^2$

156

$12xy + 9x^2 + 4y^2 =$ _____

$(2y + 3x)^2$

o

$(3x + 2y)^2$

157

$16x^4 + 9y^4 - 2x^2y^2 =$ _____

La expresión dada

**no**

es un trinomio cuadrado perfecto.

158

$25a^{12} + 20a^6 + 4 =$ _____

$(5a^6 + 2)^2$

159

$1 + 2a^3 - a^6 =$ _____

La expresión dada

**no**

es un trinomio cuadrado perfecto.

160

Atención.

$$-m^2 - 12m - 36 = \underline{\qquad\qquad}$$

Respuesta
en el
cuadro siguiente

Atención.

$$-m^2 - 12m - 36 = \underbrace{-1}_{\text{factor común}}\underbrace{(m^2 + 12m + 36)}_{\text{trinomio cuadrado perfecto}}$$

Factorizando:

$$-1(m^2 + 12m + 36) = -1(m + 6)^2 = -(m + 6)^2$$

$2 \cdot m \cdot 6$, $m$, $6$

161

$$-49x^4 + 14x^2 - 1 = \underline{\qquad\qquad}$$

Respuesta
en el
cuadro siguiente

$$-49x^4 + 14x^2 - 1 = -1\underbrace{(49x^4 - 14x^2 + 1)}_{\text{trinomio cuadrado perfecto}}$$

$$-1(49x^4 - 14x^2 + 1) = -1(7x^2 - 1)^2 = -(7x^2 - 1)^2$$

**1.9.4.4**

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

**1.9.4**

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *factorizar* expresiones que identifique como trinomios cuadrados perfectos en $\mathbb{Z}$.

9.5

## Factorización de la diferencia de los cuadrados de dos monomios en $\mathbb{Z}$.

162

$(a + b)(a - b) =$ [ ]

Efectuar la multiplicación, si no podemos dar el resultado por simple inspección.

$a^2 - b^2$

163

$(a + b)(a - b)$
producto de binomios conjugados

→ por multiplicación obtenemos

$a^2 - b^2$
"diferencia de cuadrados"

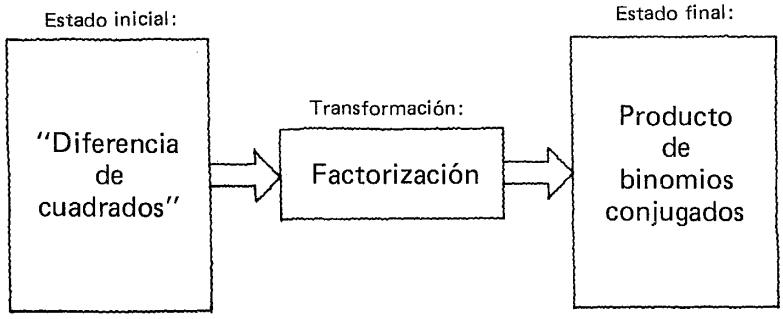
$a^2 - b^2$
"diferencia de cuadrados"

→ por factorización obtenemos

$(a + b)(a - b)$
producto de binomios conjugados

164

Factorización de una "diferencia de cuadrados" interpretada como un proceso de transformación de una suma (de términos) en un producto (de factores).




165

Señalar las expresiones que sean identificadas como **diferencia de cuadrados en** $\mathbb{Z}$.

Modelo: $a^2 - b^2$ con $a, b \in M\mathbb{Z}$

| | | |
|---|---|---|
| $x^2 - y^2$ | $x^2 - 1$ | $a^{10} - b^{20}$ |
| $x^3 - y^3$ | $x^4 - 25$ | $x^{2m} - y^{2n}$ |
| $x^4 - y^4$ | $4y^2 + 9$ | $x^{2m+1} - y^{2n+1}$ |
| $36a^6 - 25b^8$ | $1 - m^2n^2$ | $14x^2 - 8$ |
| $m - n$ | $a^5 - b^5$ | $1 - m^{24}$ |

Respuesta en el cuadro siguiente

| | | |
|---|---|---|
| $x^2 - y^2$ | $x^2 - 1$ | $a^{10} - b^{20}$ |
| $x^4 - y^4$ | $x^4 - 25$ | $x^{2m} - y^{2n}$ |
| $36a^6 - 25b^8$ | $1 - m^2n^2$ | $1 - m^{24}$ |

166

Señalar las expresiones que sean identificadas como **producto de binomios conjugados** (en $\mathbb{Z}$)

Modelo:
$(a + b)(a - b)$
con $a, b \in M\mathbb{Z}$.

| | | |
|---|---|---|
| $(x + y)(x - y)$ | $(4 + x)(4 - x)$ | $x - 1$ |
| $(x + 2)(x - 2)$ | $(x^2 + 5)(x^2 - 5)$ | $(x - 1)^2$ |
| $(x + 3)(x - 2)$ | $(x^2 + y^3)(x^2 - y^3)$ | $(x + 2)^2$ |
| $(x - 1)(x + 2)$ | $(1 - x^{10})(1 + x^{20})$ | $m - n$ |
| $x^2 - y^2$ | $(25 - 4x)(25 + 4x)$ | $5$ |

$(x + y)(x - y)$

$(x + 2)(x - 2)$

$(4 + x)(4 - x)$

$(x^2 + 5)(x^2 - 5)$

$(x^2 + y^3)(x^2 - y^3)$

$(25 - 4x)(25 + 4x)$

167

Ejemplo de factorización de una "diferencia de cuadrados en $\mathbb{Z}$".

Modelo:

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$
$$a, b \in M\mathbb{Z}$$

Estado inicial: $16x^2 - 25y^4$ Estado final: $= (4x + 5y^2)(4x - 5y^2)$

$a = 4x$

$b = 5y^2$

168

Factorizar las siguientes expresiones si son identificadas como

**diferencia de cuadrados**

en $\mathbb{Z}$.

169

$a^2 - b^2 =$ _____

$(a + b)(a - b)$

170

$1 - a^2 =$ _____

$(1 + a)(1 - a)$

171

$a^2 - 4 =$ _____

$(a + 2)(a - 2)$

172

$9 - b^2 =$ [ ]

$(3 + b)(3 - b)$

173

$1 - 4m^2 =$ [ ]

$(1 + 2m)(1 - 2m)$

174

$a^2 - 25 =$ [ ]

$(a + 5)(a - 5)$

175

$25 - 36x^4 =$ _____

$(5 + 6x^2)(5 - 6x^2)$

176

$a^{10} - 49b^{12} =$ _____

$(a^5 + 7b^6)(a^5 - 7b^6)$

177

$x^{2m} - y^{2n} =$ _____

$(x^m + y^n)(x^m - y^n)$

178

$x^5 - y^5 = \square$

La expresión dada
**no** es
una diferencia
de cuadrados en $\mathbb{Z}$:
$a, b \notin M\mathbb{Z}$

179

$100 - x^2y^6 = \square$

$(10 + xy^3)(10 - xy^3)$

**1.9.5.1**

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

**1.9.5**

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *factorizar* expresiones que sean identificadas como diferencia de cuadrados en $\mathbb{Z}$.

9.6

## Factorización de trinomios de la forma $x^2 + px + q$, en $\mathbb{Z}$

180

Empezaremos por identificar los trinomios de la forma $x^2 + px + q$ en $\mathbb{Z}$.

181

Modelo:

$x^2 + px + q \quad p, q \in \mathbb{Z} \; ; \; x \in M\mathbb{Z}$

¿Es

$x^2 + 7x + 12$

un trinomio de la forma $x^2 + px + q$ en $\mathbb{Z}$?

Sí/No

Sí

182

Modelo: $x^2 + px + q \quad p, q \in \mathbb{Z}; x \in M\mathbb{Z}$.

$x^2 + 7x + 12$

$x =$ ⌊_____⌋

$p =$ ⌊_____⌋

$q =$ ⌊_____⌋

$x = x$

$p = 7$

$q = 12$

$x \in M\mathbb{Z}; 7, 12 \in \mathbb{Z}$

183

¿Es

$x^2 - 7x + 12$

un trinomio de la forma $x^2 + px + q$?

Sí/No

En caso de serlo:

$x =$ ⌊_____⌋

$p =$ ⌊_____⌋

$q =$ ⌊_____⌋

Sí

$x = x$
$p = 7$
$q = 12$
} $x \in M\mathbb{Z}; \quad -7, 12 \in \mathbb{Z}$

184

¿Es

$x^2 - x - 12$

un trinomio de la forma $x^2 + px + q$?

Sí/No

En caso de serlo:

$x =$ ⌊_____⌋

$p =$ ⌊_____⌋

$q =$ ⌊_____⌋

Sí

$x = x$
$p = -1$
$q = -12$
} $x \in M\mathbb{Z}; \quad -1, -12 \in \mathbb{Z}$

185

¿Es

$$y^2 + 5y + 6$$

un trinomio de la forma
$x^2 + px + q$?

Sí/No

En caso de serlo:

$x =$ ⌊_____⌋

$p =$ ⌊_____⌋

$q =$ ⌊_____⌋

Sí

$x = y$
$p = 5$ } $y \in M\mathbb{Z}$; $5, 6 \in \mathbb{Z}$
$q = 6$

186

¿Es

$$m^4 + 5m^2 + 6$$

un trinomio de la forma
$x^2 + px + q$?

Sí/No

En caso de serlo:

$x =$ ⌊_____⌋

$p =$ ⌊_____⌋

$q =$ ⌊_____⌋

El trinomio puede ser expresado así:

$(m^2)^2 + 5(m^2) + 6$

Sí

$x = m^2$
$p = 5$ } $m^2 \in M\mathbb{Z}$; $5, 6 \in \mathbb{Z}$
$q = 6$

187

¿Es

$$a^6 - 8a^3 + 15$$

un trinomio de la forma
$x^2 + px + q$?

Sí/No

En caso de serlo:

$x =$ ⌊_____⌋

$p =$ ⌊_____⌋

$q =$ ⌊_____⌋

El trinomio dado puede ser expresado así:

$(a^3)^2 - 8(a^3) + 15$

Sí

$x = a^3$
$p = -8$ } $a^3 x \in M\mathbb{Z}$; $-8, 15 \in \mathbb{Z}$
$q = 15$

188

¿Es

$$5x^2 + 6x - 5$$

un trinomio de la forma $x^2 + px + q$?

Sí/No

En caso de serlo:

$x =$ _____

$p =$ _____

$q =$ _____

No

$x \notin M\mathbb{Z}$

189

Atención:

¿Es

$$9x^2 + 15x - 4$$

un trinomio de la forma $x^2 + px + q$?

Sí/No

En caso de serlo:

$x =$ _____

$p =$ _____

$q =$ _____

Expresado el trinomio en esta forma:

$$(3x)^2 + 5(3x) - 4$$

Sí

$x = 3x$

$p = 5$

$q = -4$

$3x \in M\mathbb{Z}$; $5, -4 \in \mathbb{Z}$

190

¿Es

$$x^2 + 3a + 7$$

un trinomio de la forma $x^2 + px + q$?

Sí/No

En caso de serlo:

$x =$ _____

$p =$ _____

$q =$ _____

No

porque en el trinomio dado aparecen **dos** indeterminadas:

x y a

191

¿Es

$$a^2 + \frac{3}{4}a - \frac{5}{4}$$

un trinomio de la forma
$x^2 + px + q$ en $\mathbb{Z}$?

Sí/No

En caso de serlo:

$x =$ [ ]

$p =$ [ ]

$q =$ [ ]

No

$x = a$
$p = \frac{3}{4}$
$q = -\frac{5}{4}$
$a \in M\mathbb{Z}$
$\frac{3}{4}, -\frac{5}{4} \notin \mathbb{Z}$

**1.9.6.1**

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

192

$(x + 5)(x + 3) =$ [ ]

Si no es posible dar el resultado
por simple inspección,
efectuar la multiplicación.

Respuesta
en el
cuadro siguiente

$(x + 5)(x + 3)$

productos de dos binomios con un término común

→ por multiplicación obtenemos

$x^2 + 8x + 15$

trinomio de la forma

$x^2 + px + q$

$x^2 + 8x + 15$

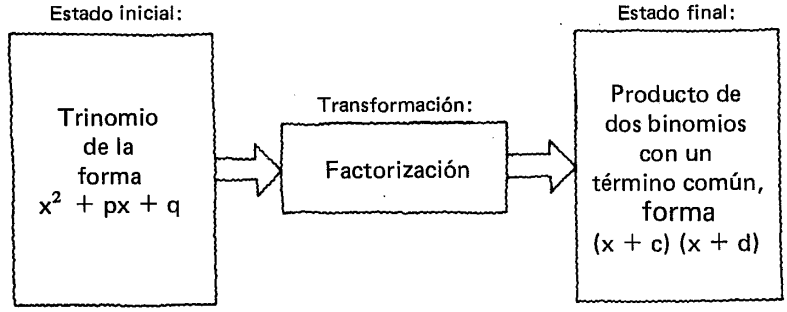
→ por factorización obtenemos

$(x + 5)(x + 3)$

producto de dos binomios con un termino común.

193

Factorización de un trinomio de la forma $x^2 + px + q$, interpretado como un proceso de transformación de una suma (de términos) en un producto (de factores).




194

En general:

$(x + c)(x + d) =$ [ ]

$x^2 + (c + d)x + cd$

p q

195

Estudiar con atención esta expresión:

$$(x + c)(x + d) = x^2 + \underbrace{(c + d)}_{p}x + \underbrace{cd}_{q}$$

196

Un ejemplo de factorización de un trinomio de la forma $x^2 + px + q$:

término común

$$x^2 + 8x + 15 = (x\square)(x\square)$$

dos números cuya suma es + **8** y cuyo producto es + **15**

Respuesta en el cuadro siguiente

$$x^2 + 8x + 15 = (x + \mathbf{3})(x + \mathbf{5})$$

**1.9.6.2**

Práctica de identificación de expresiones en el estado final del producto de dos binomios con un término común, si se considera necesario.

197

De las siguientes expresiones, factorizar las que sean identificadas como trinomios de la forma $x^2 + px + q$, en $\mathbb{Z}$.

198

$x^2 + 5x + 6 = (x\square)(x\square)$

$(x + 2)(x + 3)$

199

$x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$

Comprobación por multiplicación:

$$\begin{array}{r} x + 2 \\ x + 3 \\ \hline x^2 + 2x \\ \quad 3x + 6 \\ \hline x^2 + 5x + 6 \end{array}$$

200

$x^2 + 5x + 4 = (____)(____)$

$(x + 4)(x + 1)$

201

$x^2 + 12x + 35 = _____$

$(x + 7)(x + 5)$

202

$x^2 + 9x + 18 =$ ⌊_____⌋

$(x + 6)(x + 3)$

203

$x^2 + 7x + 10 =$ ⌊_____⌋

$(x + 5)(x + 2)$

204

$a^2 + 18a + 81 =$ ⌊_____⌋

☞ Estudiar con atención el resultado.

$a^2 + 18a + 81$

$= (a + 9)(a + 9)$

$= (a + 9)^2$

El trinomio dado es, también, un trinomio cuadrado perfecto.

205

$x^4 + 9x^2 + 20 =$ _____

$(x^2 + 4)(x^2 + 5)$

206

$n^{2m} + 5n^m + 6 =$ _____

$(n^m + 3)(n^m + 2)$

207

$a^2 + 6x + 8 =$ _____

$a^2 + 6x + 8$

**no** es un trinomio de la forma: $x^2 + px + q$

Observar la presencia de dos indeterminadas diferentes (a y x)

208

$x^2 + 8x + 10 =$ _____

$x^2 + 8x + 10$

no es factorizable en $\mathbb{Z}$, pues no existen, en $\mathbb{Z}$, dos números cuya suma sea $+ 8$ y cuyo producto sea $+ 10$.

**1.9.6.3**

Práctica adicional de factorización de trinomios de la forma $x^2 + px + q$ en que p y q son positivos, si se considera necesario.

209

$x^2 + 2x - 8 =$ _____

Respuesta en el cuadro siguiente

Mucha atención.

$x^2 + 2x - 8 = (x + 4)(x - 2)$

- los números buscados deben ser: uno positivo y el otro negativo para que su producto sea negativo
- el número de mayor valor absoluto debe ser positivo, para que la suma sea positiva:

número de mayor valor absoluto $+4$

número de menor valor absoluto $-2$

$+2$

hay que ensayar pares de factores de 8

210

$x^2 - 2x - 15 =$ _____

- $(x - 5)(x + 3)$

$-5$

$+3$

suma $-2$

producto $(-5)3 = -15$

211

$x^2 - 10x + 21 =$ _____

$(x - 7)(x - 3)$

Ambos negativos, puesto que q es positivo y p negativo:

$-7$
$-3$ $\}$ $(-7)(-3) = +21$

$-10$

212

$x^2 - 5x + 4 =$ _____

$(x - 4)(x - 1)$

Ambos negativos, puesto que q es positivo y p negativo:

$-4$
$-1$
$-5$

$(-4)(-1) = +4$

213

$a^2 - 5a + 6 =$ _____

$(a - 3)(a - 2)$

Ambos negativos, puesto que q es positivo y p negativo:

$-3$
$-2$
$-5$

$(-3)(-2) = +6$

214

$x^2 + 3x - 28 =$ _____

$(x + 7)(x - 4)$

215

$x^2 - 4x - 45 =$ ⌊_____⌋

$(x - 9)(x + 5)$

**1.9.6.4**

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

216

Atención.

$4x^2 + 6x + 2 =$ ⌊_____⌋

Expresar el trinomio dado en esta forma:

$(2x)^2 + 3(2x) + 2 =$

↓

$(2x + 1)(2x + 2)$

217

$25x^6 + 10x^3 - 35 =$ ⌊_____⌋

Expresar el trinomio dado en esta forma:

$(5x^3)^2 + 2(5x^3) - 35$

luego:

$(5x^3 + 7)(5x^3 - 5)$

218

$9x^{2m} + 12x^m + 3 =$ ⌊_____⌋

$(3x^m)^2 + 4(3x^m) + 3$

entonces:

$(3x^m + 3)(3x^m + 1)$

**1.9.6**

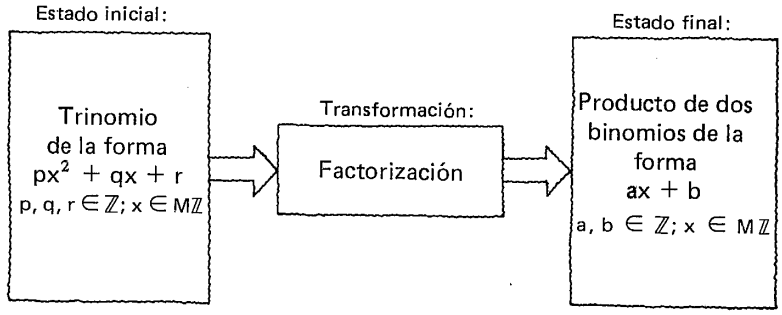
En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *factorizar* expresiones que sean identificadas como trinomios de la forma $x^2 + px + q$, en que: $p, q \in \mathbb{Z}$ y x es un monomio en $\mathbb{Z}$.

9.7

Factorización de un trinomio de la forma $px^2 + qx + r$
en que $p, q, r \in \mathbb{Z}$ y x es un monomio en $\mathbb{Z}$

219




220

Sabemos que:

$$(ax + b)(cx + d) = \square$$

Efectuar la multiplicación
si no se puede dar el resultado
por simple inspección.

$acx^2 + (bc + ad)x + bd$

221

$$(ax + b)(cx + d) = \overbrace{acx^2}^{p} \overbrace{+ (bc + ad)x}^{q} \overbrace{+ bd}^{r}$$

por lo tanto:

$$px^2 + qx + bd = (ax + b)(cx + d)$$

de tal modo que:

$$\left.\begin{aligned} ac &= p \\ bc + ad &= q \\ bd &= r \end{aligned}\right\}$$ Encontrar por tanteos, cuatro números que satisfagan estas tres condiciones no es tarea fácil.

222

Estudiaremos un artificio para la factorización de un trinomio de la forma $px^2 + qx + r$, en que $p, q, r \in \mathbb{Z}$ y $x \in M\mathbb{Z}$.

223

Se requiere factorizar

$$5x^2 + 4x - 12$$

**Procedimiento**

1. Multiplicar el polinomio por el coeficiente del término de segundo grado:

$$5^2x^2 + 5 \cdot 4x - 12 \cdot 5$$

224

2. Expresar en la siguiente forma:

$(5x)^2 + 4(5x) - 60$

3. Factorizar como un trinomio de la forma $x^2 + px + q$:

$(5x + 10)(5x - 6)$

225

4. Dividir entre **5**, dado que habíamos alterado el valor de la expresión al multiplicarla por **5**:

$$\frac{(5x + 10)(5x - 6)}{5}$$

5. Expresar en la forma siguiente, puesto que el factor $(5x + 10)$ es divisible por 5:

$$\frac{(5x + 10)}{5}(5x - 6)$$

226

6. Efectuar la división indicada:

$(x + 2)(5x - 6)$ ← resultado

7. Comprobación:

$$\begin{array}{r} 5x - 6 \\ x + 2 \\ \hline 5x^2 - 6x \\ \quad + 10x - 12 \\ \hline 5x^2 + 4x - 12 \end{array} \leftarrow \text{¡Bien!}$$

227

Otro ejemplo:

Se requiere factorizar $6x^2 + 5x - 6$

**Procedimiento**

1. Multiplicar por 6: $6^2x^2 + 5 \cdot 6x - 6 \cdot 6$
2. Expresar así: $(6x)^2 + 5(6x) - 36$
3. Factorizar como $x^2 + px + q$:

$$(6x + 9)(6x - 4)$$

Continúa en el cuadro siguiente.

228

4. Dividir entre 6:

$$\frac{(6x + 9)(6x - 4)}{6}$$

5. Expresar en la siguiente forma, dado que el primer factor es divisible por **3** y el segundo por **2** ($3 \cdot 2 = 6$):

$$\frac{(6x + 9)}{3} \cdot \frac{(6x - 4)}{2}$$

Continúa en el cuadro siguiente.

229

6. Efectuar las divisiones indicadas:

$(2x + 3)(3x - 2)$ ← resultado

7. Comprobación:

$$(2x + 3)(3x - 2) = 6x^2 + 9x - 4x - 6$$

$$= 6x^2 + 5x - 6 \qquad \text{¡Bien!}$$

230

Como ejercicios adicionales, factorizar las siguientes expresiones y comparar los resultados con los del cuadro siguiente:

1. $6x^2 - 7x - 3$
2. $10x^2 + 9x - 9$
3. $2x^2 + 5x - 12$
4. $6x^4 + 7x^2 - 3$
5. $21x^2 + 22x - 8$
6. $20x^2 - 23x + 6$
7. $2x^2 + 7x - 4$
8. $25x^2 + 30x + 9$
9. $6x^2 - 32x + 10$
10. $5x^2 - 3x + 4$

231

Respuestas:

1. $(2x - 3)(3x + 1)$
2. $(5x - 3)(2x + 3)$
3. $(x + 4)(2x - 3)$
4. $(3x^2 - 1)(2x^2 + 3)$
5. $(7x - 2)(3x + 4)$
6. $(4x - 3)(5x - 2)$
7. $(x + 4)(2x - 1)$
8. $(5x + 3)(5x + 3) = (5x + 3)^2$ (*)
9. $(6x - 2)(x - 5)$
10. no factorizable en $\mathbb{Z}$

(*) El trinomio dado es cuadrado perfecto

**1.9.7.1**

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

**1.9.7**

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *factorizar* expresiones que sean identificadas como trinomios de la forma $px^2 + qx + r$ con $p, q, r \in \mathbb{Z}$, siendo x un monomio en $\mathbb{Z}$.

## 9.8

Factorización de una suma o diferencia de dos monomios cubo perfecto en $\mathbb{Z}$

232

Sabemos que:

$(a + b)(a^2 - ab + b^2) =$ _____

$(a - b)(a^2 + ab + b^2) =$ _____

Efectuar la multiplicación, si se considera necesario.

$a^3 + b^3$

$a^3 - b^3$

233

$(a + b)(a^2 - ab + b^2)$ → por multiplicación obtenemos → $a^3 + b^3$

$(a - b)(a^2 + ab + b^2)$ → por multiplicación obtenemos → $a^3 - b^3$

234

Por lo tanto:

$a^3 + b^3 = (\square)(\square)$

$a^3 - b^3 = (\square)(\square)$

Respuesta en el cuadro siguiente

Observar con atención:

$a^3 + b^3$ → por factorización obtenemos → $(a + b)(a^2 - ab + b^2)$

$a^3 - b^3$ → por factorización obtenemos → $(a - b)(a^2 + ab + b^2)$

235

El estado inicial:

$a^3 \pm b^3$

a y b son monomios en $\mathbb{Z}$

236

Si $a^3 = x^6$

¿qué es a?

$a =$ ⌊____⌋

$x^2$

237

Si $a^3 = x^3$

$a =$ ⌊____⌋

x

238

Si $a^3 = 8$

$a =$ ⌊____⌋

2

239

Si $a^3 = 27$

$a =$ ⌊____⌋

3

240

Si $a^3 = 27x^3$

$a =$ ⌊____⌋

3x

241

Si $a^3 = 8a^3b^6$

$a =$ ⌊____⌋

$2ab^2$

242

Si $a^3 = 1$

$a =$ ⌊____⌋

1

243

Si $a^3 = 2$

$a =$ ⌊____⌋

$a \notin M\mathbb{Z}$

244

Si $a^3 = x^5$

$a =$ ⌊____⌋

$a \notin M\mathbb{Z}$

245

Si $a^3 = 8x^3y^6z^{12}$

$a =$ ⌊_____⌋

$2xy^2z^4$

246

Si $a^3 = 125x^3y^9$

$a =$ ⌊_____⌋

$5xy^3$

247

Si $a^3 = 14x^4y^5$

$a =$ ⌊_____⌋

$a \notin M\mathbb{Z}$

248

Si en $a^3$

$a \in M\mathbb{Z}$

decimos que $a^3$ es un

**monomio cubo perfecto,** en $\mathbb{Z}$.

249

Si $a^3 = 8x^3y^6$

$a =$ ⌊_____⌋

a ⌊___⌋ $M\mathbb{Z}$
$\in$ o $\notin$

por lo tanto:

$8x^3y^6$ ⌊___⌋ un **monomio cubo perfecto,** en $\mathbb{Z}$.
es/no es

$2xy^2$

$\in$

es

250

Si $a^3 = 5x^4y^7$

$a =$ ⌊___⌋

a ⌊___⌋ $M\mathbb{Z}$
$\in/\notin$

Por lo tanto

$a^3$ ⌊___⌋ un **monomio cubo perfecto** en $\mathbb{Z}$.
es/no es

?

$\notin$

no es

251

Señalar los **monomios cubo perfecto**, en $\mathbb{Z}$.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $64x^3$ | $27x^6$ | $125a^{12}$ | $\frac{a^3}{8}$ |
| $30xy^2$ | $8a^3b^2$ | $b^6$ | $x$ |
| $a^3$ | $8a^3b^6c^9$ | $a^5$ | $6a^3$ |
| $1$ | $8$ | $27$ | $x^3$ |
| $36$ | $47x^3$ | $100a^4$ | $\frac{1}{27}$ |

$64x^3$
$a^3$
$1$
$27x^6$
$8a^3b^6c^9$
$8$
$125\,a^{12}$
$b^6$
$27$
$x^3$

252

Señalar las expresiones que sean identificadas como una **suma** o

**diferencia de monomios cubo perfecto**, en $\mathbb{Z}$:

| | | |
|---|---|---|
| $x^3 - 8$ | $x^3y^6z^9 - 125$ | $216 + 64a^3$ |
| $a^6 + 27$ | $64a^9 + 1$ | $m^3n^6 - 1000$ |
| $1 + b^3$ | $\frac{x^3}{8} + \frac{y^3}{27}$ | $8x^{3n} - 27y^{3m}$ $m\,n, \in \mathbb{N}$ |
| $6a^3 - 8b^3$ | $a^3 + b^3$ | $x^{3k+1} + y^{3q+1}$ $k, q \in \mathbb{N}$ |

$x^3 - 8$
$a^6 + 27$
$1 + b^3$
$x^3y^6z^9 - 125$
$64a^9 + 1$
$a^3 + b^3$
$216 + 64a^3$
$m^3n^6 - 1000$
$8x^{3n} - 27y^{3m}$ $n, m \in \mathbb{N}$

253

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$$

Estado final:

$$(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$$

254

Completar las expresiones siguientes para obtener el producto de un binomio de la forma $a \pm b$ y de un trinomio de la forma $(a^2 \mp ab + b^2)$

255

$(x + y)(\underline{\quad\quad\quad})$

$x^2 - xy + y^2$

256

$(a - 1)(\underline{\quad\quad\quad})$

$a^2 + a + 1$

257

$(2a + 3b)(\square)$

$4a^2 - 6ab + 9b^2$

258

$(xy - 2)(\square)$

$x^2y^2 + 2xy + 4$

259

$(m + 3)(\square)$

$m^2 - 3m + 9$

260

$(5a - 7b)(\square)$

$25a^2 + 35ab + 49b^2$

261

$(ab - 4c^2d^3)(\square)$

$a^2b^2 + 4abc^2d^3 + 16c^4d^6$

262

$(x^n - y^m)(\square)$

$x^{2n} + x^n y^m + y^{2m}$

**1.9.8.1**

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

263

**Factorizar** las expresiones siguientes que sean identificadas como **suma** o **diferencia de cubos** en $\mathbb{Z}$, comprobando los resultados obtenidos.

264

$a^3 + b^3 =$ ____

$(a + b)(a^2 - ab + b^2)$

265

$x^3 - y^3 =$ _____

$(x - y)(x^2 + xy + y^2)$

266

$x^3 + 8 =$ _____

$(x + 2)(x^2 - 2x + 4)$

267

$m^3 - 1 =$ _____

$(m - 1)(m^2 + m + 1)$

268

$27 + k^3 =$ _____

$(3 + k)(9 - 3k + k^2)$

269

$1 - x^6 =$ _____

$(1 - x^2)(1 + x^2 + x^4)$

270

$8a^6 + 125 =$ _____

$(2a^2 + 5)(4a^4 - 10a^2 + 25)$

271

$64a^3b^6c^9 - 1000 =$ ____

$(4ab^2c^3 - 10)(16a^2b^4c^6 + 40ab^2c^3 + 100)$

272

$a^{3n} + b^{3n} =$ ____

$(a^n + b^n)(a^{2n} - a^nb^n + b^{2n})$

273

$5a^3 - 7b^3 =$ ____

La expresión dada **no** es factorizable en $\mathbb{Z}$; No es una diferencia de cubos en $\mathbb{Z}$.

274

$a^3 + 4 =$ _____

La expresión dada **no** es factorizable en $\mathbb{Z}$; **No** es una suma de cubos en $\mathbb{Z}$.

**1.9.8.2**

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

**1.9.8**

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *factorizar* expresiones que sean identificadas como una suma o diferencia de monomios cubo perfecto en $\mathbb{Z}$.

## 9.9

## Factorización de un polinomio cubo perfecto en $\mathbb{Z}$

275

Recordemos que:

$(a \pm b)^3 =$ _____

Efectuar las multiplicaciones correspondientes, si se considera necesario.

$a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$

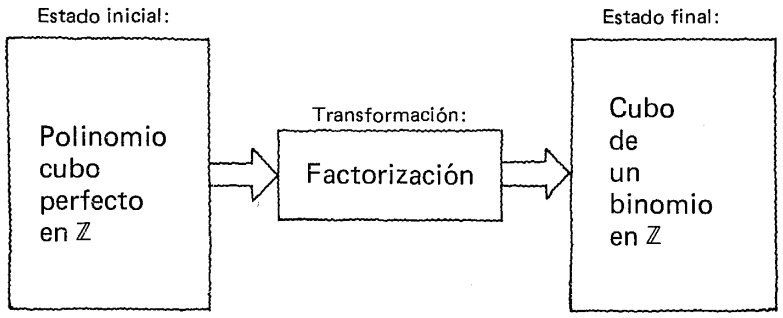
276

$(a \pm b)^3 = \underbrace{a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3}$

**polinomio cubo perfecto ordenado**

$a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 = (a \pm b)^3$

277




278

Para la identificación de un **polinomio cubo perfecto** en $\mathbb{Z}$ debemos tener en cuenta lo siguiente:

1. Número de términos: 4
2. Verificación del orden
3. Verificación de los signos
4. Estando el polinomio ordenado, el primero y el cuarto términos deben ser **monomios cubo perfecto** en $\mathbb{Z}$

$$a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

monomios cubo perfecto en $\mathbb{Z}$

Continúa en el cuadro siguiente.

279

5. Determinación de a y b:
6. Verificación del segundo y tercer términos

$$a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

- $3a^2b$: triple producto del cuadrado de a; y b
- $3ab^2$: triple producto de a; y el cuadrado de b

ⓐ ⓑ

280

$$x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

¿Es un polinomio cubo perfecto en $\mathbb{Z}$?

Sí/No

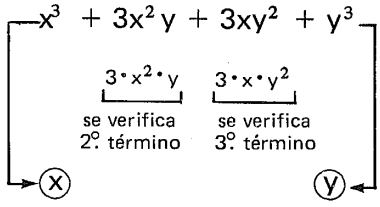
Sí

Véase cuadro siguiente

281

Modelo:

$$a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$
$$a, b \in M\mathbb{Z}$$




282

$$8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$$

¿Es un polinomio cubo perfecto en $\mathbb{Z}$?

Sí/No

Sí

Véase cuadro siguiente

283

Modelo:

$$a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$
$$a, b \in M\mathbb{Z}$$

$$8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$$

$3(2x)^2 \cdot 1$ — se verifica 2º término

$3 \cdot 2x \cdot 1^2$ — se verifica 3º término

$2x$ $\quad$ $1$

284

$$8x^3 + 12x - 12x^2 - 1$$

¿Es un polinomio cubo perfecto en $\mathbb{Z}$?

Sí/No

No

Véase cuadro siguiente

285

Modelo:

$$a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$
$$a, b \in M\mathbb{Z}$$

$$8x^3 + 12x - 12x^2 - 1$$

Polinomio ordenado:

$$8x^3 - 12x^2 + 12x - 1$$

$3 \cdot (2x)^2 \cdot 1$ — se verifica 2º término

$3 \cdot (2x) \cdot 1^2$ — no se verifica 3º término

$2x$ $\quad$ $1$

286

$$27x^3 - 18x^2 + 12x - 14$$

¿Es un polinomio cubo perfecto en $\mathbb{Z}$?

Sí/No

No

Véase cuadro siguiente

287

Modelo:

$$a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$
$$a, b \in M\mathbb{Z}$$

$$27x^3 - 18x^2 + 12x - 14$$

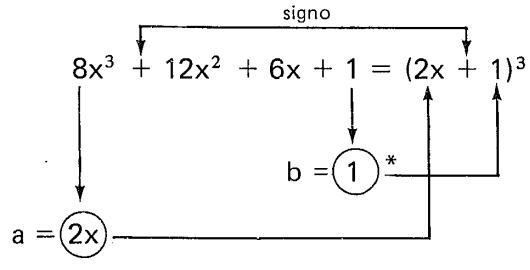
$$a = 3x$$

pero

$$b \notin M\mathbb{Z}$$

288

Ejemplo de factorización de un polinomio cubo perfecto en $\mathbb{Z}$:




* Podemos escribir: $a = \sqrt[3]{8x^3} = 2x$ y $b = \sqrt[3]{1} = 1$.

289

Ejercicios adicionales:

1. $a^3 - 3a^2 + 3a - 1 =$ ⌊_____⌋
2. $8x^3 - 12x^2 + 6x - 1 =$ ⌊_____⌋
3. $8x^6 - 36x^4y^3 + 54x^2y^6 - 27y^9 =$ ⌊_____⌋
4. $1 + 12a + 48a^2 + 64a^3 =$ ⌊_____⌋
5. $27x^3 + 54x^2y + 36xy^2 + 8y^3 =$ ⌊_____⌋

$(a - 1)^3$

$(2x - 1)^3$

$(2x^2 - 3y^3)^3$

$(1 + 4a)^3$

$(3x + 2y)^3$

**1.9.9**

En este punto el alumno debe ser capaz de:

- *factorizar* expresiones que identifique como polinomios cubo perfecto en $\mathbb{Z}$.

## 9.10

## Resumen de factorización en $\mathbb{Z}$

290

| FACTORIZACIÓN DISTRIBUTIVA EN $\mathbb{Z}$ | | |
|---|---|---|
| Estado inicial | Expresión algebraica | Estado final |
| 1 Polinomio (suma-de términos-) con factor común monomio | Ejemplo:<br>$(ax + bx + cx + \ldots) = x(a + b + c + \ldots)$ | Producto (de factores) |
| 2 Polinomio (suma-de términos-) con factor común polinomio | Ejemplo:<br>$(a + b)x + (a + b)y = (a + b)(x + y)$ | Producto (de factores) |
| 3 Polinomio factorizable por agrupación | Por ejemplo:<br>$ax + ay + bx + by = (x + y)(a + b)$ | Producto (de factores) |

291

| CASOS ESPECIALES DE FACTORIZACIÓN EN $\mathbb{Z}$ | | |
|---|---|---|
| Estado inicial | Expresión algebraica | Estado final |
| 1 Trinomio cuadrado perfecto | $x^2 \pm 2xy + y^2 = (x \pm y)^2$ | Cuadrado de un binomio |
| 2 Diferencia de cuadrados | $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$ | Producto de dos binomios conjugados |
| 3 Trinomio de la forma $x^2 + px + q$ | $x^2 + px + q = (x + a)(x + b)$ tal que: $a + b = p$ y $a \cdot b = q$ | Producto de dos binomios con un término común |

Continúa en el cuadro siguiente

| CASOS ESPECIALES DE FACTORIZACIÓN EN $\mathbb{Z}$ (*CONTINUACIÓN*) | | | |
|---|---|---|---|
| 4 | Trinomio de la forma $px^2 + qx + r$ | $px^2 + qx + r = (ax + b)(cx + d)$ tal que: $ac = p$ $bc + ad = q$ $bd = r$ | Producto de dos binomios de la forma $ax + b$ |
| 5 | Suma o diferencia de cubos | $x^3 \pm y^3 = (x \pm y)(x^2 \mp xy + y^2)$ | Producto de un binomio $x \pm y$ y un trinomio $x^2 \mp xy + y^2$ |
| 6 | Polinomio cubo perfecto | $x^3 \pm 3x^2y + 3xy^2 \pm y^3 = (x \pm y)^3$ | Cubo de un binomio |

292

Al factorizar una expresión algebraica conviene analizarla con detenimiento a fin de detectar algún factor común, antes de considerarla como caso especial (trinomio cuadrado perfecto, diferencia de cuadrados, etc.).

293

Se requiere factorizar (debemos entender: descomponer en factores primos) la siguiente expresión: $25x^2 - 100$

1. Observamos la existencia del factor común 25, por lo tanto:

   $$25x^2 - 100 = 25(x^2 - 4)$$

2. Identificamos el factor entre paréntesis como una diferencia de cuadrados, entonces:

   $$25x^2 - 100 = 25(x + 2)(x - 2)$$

294

De esta manera, la expresión $25x^2 - 100$ queda descompuesta en factores primos:

$$5 \cdot 5(x + 2)(x - 2)$$

Si no se sigue el procedimiento indicado, y factorizamos la expresión original como si fuera una diferencia de cuadrados, obtenemos:

$$25x^2 - 100 = (5x - 10)(5x + 10)$$

Es importante observar que **los factores obtenidos no son primos;** ambos son divisibles por 5.

**1.9.10.1**

Práctica miscelánea de los casos estudiados de factorización.

**1.9.10**

En este punto el alumno debe ser capaz de:

- *factorizar* en $\mathbb{Z}$, expresiones que sean identificadas como:

  - polinomios en $\mathbb{Z}$ con factor común monomio,
  - polinomios en $\mathbb{Z}$ con factor común polinomio,
  - polinomios en $\mathbb{Z}$ factorizables por agrupación de términos,
  - trinomios cuadrados perfectos en $\mathbb{Z}$,
  - diferencia de monomios cuadrado perfecto en $\mathbb{Z}$,
  - trinomios de la forma $x^2 + px + q$; con $p, q \in \mathbb{Z}$ y $x \in M\mathbb{Z}$,
  - trinomios de la forma $px^2 + qx + r$, con $p, q, r \in \mathbb{Z}$ y $x \in M\mathbb{Z}$,
  - suma o diferencia de monomios cubo perfecto en $\mathbb{Z}$,
  - polinomios cubo perfecto en $\mathbb{Z}$.

*Esta obra se terminó de imprimir*
*el día 12 de abril de 1985,*
*en los talleres de Litográfica Ingramex, S. A.,*
*Centeno núm. 162, loc. 1, Col. Granjas Esmeralda,*
*Deleg. Iztapalapa, 09810, México, D. F.,*
*se encuadernó en Ediciones Pegaso, S. A.,*
*Centeno núm. 162, loc. 4, Col. Granjas Esmeralda,*
*Deleg. Iztapalapa, 09810, México, D. F.,*
*se tiraron*
*3 000 ejemplares, más sobrantes de reposición*

CO ET KC 100